Lycée El Manar Sidi bouzid	Devoir de Synthèse N°1	*Prof:M*[r] *Toumi* **Omrane**

Classe: 4 ème Maths **(2003-2004)**

Exercice N°1

I°/

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-(1+7i)Z+5i-14=0$

2° Soit $P(Z)=Z^3-(1+9i)Z^2+(-28+7i)Z+10+28i$

a) Montrer que $P(Z)=0$ admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on précisera

b) Déterminer les complexes b et c pour que $P(Z)=(Z-Z_0)(Z^2+bZ+c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(Z)=0$

II°/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.On considère les points
A, B et C d'affixes respectives $Z_A=2i$, $Z_B=-1+4i$ et $Z_C=2+3i$. Soientt R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la traslation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1° Montrer que R(C)=B

2° Donner l'affixe du point D tel que t(C)=D

3° Ecrire les expréssions complexes de R et t

4° Soit M le point d'affixe z; M_1 d'affixe z_1 image de par R et M' d'affixe z' image de M_1 par t

a) Exprimer z_1 en fonction de z et z' en fonction de z_1

b) En déduire l'expréssion de z' en fonction de z

c) Montrer que l'application $f=t\circ R$ est une rotation dont-on précisera le centre et l'angle

d) Préciser f(C) et f(A)

Exercice N°2

Soit l'équation (E): $(1-i)Z^2+2i(a+1)Z-(1+i)(a^2+1)=0$; $a\in\mathbb{C}$

1° Résoudre dans **C** l'équation (E). (On note par z_1 et z_2 ces solutions avec z_2 la Solution qui de vient réelle pour a=0)

2° a) Exprimer z_2 en fonction de z_1

b) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les Points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une Transformation R que l'on précisera

3° On pose $a=e^{i\theta}$; $\theta\in[0,\pi]$

a) Déterminer selon θ le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2

b) Déterminer l'ensemble des points M_1 quant θ décrit $[0,\pi]$

Exercice N°3

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x-2\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$.On désigne par ζf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1° Montrer que f est continue en 1

2° Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat

3° a) Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

4° Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle **J** à préciser

5° Résoudre l'équation $f(x)=x$

6° a) Montrer que Δ:y=2 est une asymptote horizontale pour ζf au voisinage de $+\infty$

b) Tracer les courbes ζf et ζf^{-1}

7° a) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x dans **J**

8° Soit U la suite définie IR par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n dans IN

b) Montrer que u est décroissante

c) En déduire que u est convergente et calculer sa limite

9° Soit h: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to IR, x \mapsto \left(\frac{\sin x}{1-\sin x}\right)^2$

a) Montrer pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a:$h(x)=f^{-1}(2\sin x)$

b) Montrer que h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$

c) Montrer que h est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle **K** que l'on précisera

d) Calculer $h^{-1}(1)$ puis $(h^{-1})'(1)$